Sixième partie

Annexes

Appendice 1

Exemples supplémentaires de dilemmes

Nous citons ici *quelques* cas de dilemmes pouvant prolonger des questions évoquées dans le corps de l'ouvrage. Nous commencerons par étudier le paradoxe de l'inattendu et montrer que sa structure est celle des dilemmes. Nous rapporterons ensuite quelques cas de dilemmes discutés à l'époque médiévale, puis de dilemmes proches de dilemmes discutés dans le corps du texte. Nous terminerons par quelques jeux autour du Menteur proposés par Hofstadter.

I Etude de cas : le paradoxe de l'inattendu

1 Introduction

Nous avons vu de très nombreux exemples de dilemmes portant sur des domaines variés. Nous avons vu également que la proposition servant de base à la boucle était suceptible de s'exprimer selon différentes modalités. Est-il possible de donner un dilemme fondé sur une prophétie, une prédiction ?

Le moyen le plus simple et très connu d'obtenir un bouclage avec une prédiction est la prophétie autoréalisatrice. Celles-ci peuvent être mises en relations avec les adages, nous ne nous y appesantirons pas. Pour obtenir plus de force, considérons plutôt les dilemmes négatifs associés, qui doivent donc correspondre à des prophéties anti-autoréalisatrices. Il en existe un exemple assez courant :

Paradoxe 1 : **le paradoxe anti-autoréalisateur**

Soient deux personnages : un devin et un rationaliste. Le devin prétend pouvoir prédire les événements futurs, ce que conteste le rationaliste. Ce dernier se propose de décrire un événement qui se produira ou ne se produira pas avant une certaine date future fixée d'un commun accord. Ce papier est placé dans une enveloppe cachetée. Le devin doit, également avant cette date, écrire sur un papier «oui» s'il prédit que l'événement se sera produit et «non» dans le cas contraire.

Il advint que le rationaliste ne laissa aucune chance au devin : quoi que celui-ci ecrive, sa prédiction ne pouvait se révéler juste. Le rationaliste écrivit, en effet : «Tu aura écrit «non».»

On le voit, il s'agit d'une simple transposition du Menteur où la modalité de présentation est celle de prédiction. Le cas est plus subtil dans l'exemple suivant où c'est la modalité même de l'autoréférence qui est une prédiction, ou, moins fortement ici, une prévision.

Paradoxe 2 : **le paradoxe de l'inattendu (en un coup)**

Un professeur, le matin, à ses élèves : en début d'après-midi je vous donnerai une interrogation mais vous ne pourrez pas la prévoir (i.e. vous ne pourrez pas, avant le début de l'après-midi savoir qu'elle

aura effectivement lieu).

Avant d'analyser cet exemple, voyons en un autre un peu plus complexe, qui est à proprement parler l'objet de cette section.

2 Le paradoxe de l'inattendu

Paradoxe 3 : **le paradoxe de l'inattendu**
Source : origine probable : Lennart Ekbom, 1943, oral[1]

Un professeur de mathématiques, au moment où il abordait les questions de logique, décida de faire réfléchir plus profondément ses élèves. Il imagine alors l'opération suivante en collaboration avec le professeur de philosophie...

Un vendredi soir, après les cours, il leur annonce :

«*La semaine prochaine vous aurez une interrogation écrite. Mais, à aucun moment vous ne pourrez prévoir quand elle aura lieu.*»

Suivi du traditionnel "Je vous remercie." qui signale la fin Le lendemain matin, plusieurs élèves viennent le voir :

«Monsieur, nous avons bien réfléchi après le cours d'hier et nous en avons déduit que vous ne pouviez pas nous donner d'interrogation.

« — Ah, je suis très content de voir que vous réfléchissez. *C'est ce que j'avais prévu...* Mais expliquez-moi donc ça.

« — Eh bien ! Supposons que nous n'ayons pas eu d'interrogation avant samedi alors le vendredi soir nous saurons que vous nous la donnerez samedi, et ça, ça contredit votre hypothèse. Donc il est impossible que nous n'ayons pas eu d'interrogation avant samedi. Autrement dit on ne peut pas avoir d'interrogation samedi. On fait ensuite une récurrence descendante jusqu'à lundi et on montre comme ça qu' on ne peut pas avoir d'interrogation du tout puisque la semaine va de lundi à samedi. La récurrence est bien correcte et je peux même vous l'exposer.

« — Oui, tu peux, mais ce n'est pas la peine, *elle est inutile vu que la première partie de ce que m'as exposé démontre qu'il ne peut y avoir de dernier wagon dans ton train et donc pas de train du tout*. Du moins si ta démonstration est correcte... Je vous remercie ; à lundi !»

Les élèves rentrent chez eux assez indécis. La semaine suivante commence un peut tendue. Ensuite les élèves se détendent en ne voyant rien venir, et surtout ils "oublient" de rappeler l'interrogation à leur professeur, ceci jusqu'à jeudi où elle finit par s'abattre sur leur tête. Le sujet : «la logique mathématique». *Ils n'avaient, bien sûr, pas pu la prévoir.*

Ce cas est plus complexe et a même pu être associé aux sorites à cause de l'utilisation de la récurrence. Pour autant, même si le cas semble moins facile à trancher, les procédés de démonstration employés (y compris la récurrence), tout comme les suppositions qu'elle utilise sont *a priori* particulièrement anodins[2].

Nous commencerons par quelques mots d'histoire qui, d'une part, nous permettrons d'indiquer les nombreux noms servant à désigner ce paradoxe, et d'autre part nous donneront des indices *a posteriori* mais extrêmement nets de la classe dont relève ce paradoxe. ([3])

La source de ce paradoxe est assez floue mais il semble que l'on puisse raisonnablement l'attribuer à Lennart Ekbom, un mathématicien suédois, en 1943. L'origine du paradoxe tient dans une situation réelle, fait intéressant à noter : un exercice de défense civile avait été annoncé par la radio suédoise pour la semaine suivant l'annonce, mais cette dernière précisait que, afin de s'assurer de la bonne préparation des unités de défense civile, personne ne connaîtrait à l'avance la date de l'exercice. Ekbom, à qui il semble que cet événement eu lieu en 1943 ou 1944 perçu le paradoxe dans cet énoncé et en fit part à ses étudiants mathématiciens et philosophes de l'Université de Stockholm[4].

1. Nous reprenons essentiellement notre formulation de [107], elle-même reprise d'un thème classique. Nous soulignons quelques point cruciaux.

2. Pour ceux qui en doutent, cf. infra.

3. Nous nous baserons ici largement sur l'historique constitué par Roy Sorensen, [389], cap. 7, pp. 253–296. Pour l'essentiel nous résumerons (certains de) ses propos, mais nous ajouterons parfois notre commentaire (qui sera exprimé dans le vocabulaire utilisé dans le corps de la thèse).

4. C'est ce qu'il révèle dans une correspondance avec Martin Gardner à la suite d'un article de ce dernier.

Quine indique qu'il circulait dès 1943 à Washington et pense qu'il aurait été transmis par Tarski qui était alors à Berkeley [5]. Un des élèves de Ekbom entendit Gödel en parler à Princeton en 1947. En 1948 le paradoxe apparaît dans la littérature sous la plume de D. J. O'Connor, [299], qui dit l'avoir entendu en 1946 à Chicago. Si l'origine est effectivement à chercher chez Ekbom en 1943, on voit que ce paradoxe a été très vite diffusé, et très vite auprès de grands logiciens [6]. Dans le premier article (1948), [299], O'Connor parle évoque un «*class-A blackout*», un black-out de classe A, ce dernier terme signifiant sensiblement «inattendu/surprise». A cette époque l'histoire est encore proche de son origine. En 1952, Paul Weiss, [442], devant un usage flottant, recommandera le nom de «*prediction paradox*» [α], nom sous lequel on le trouvera ensuite souvent mentionné. Comme on trouve également une version concernant un «*surprise examination*» [β] ce paradoxe sera également très souvent désigné par ce nom ou «*unexpected examination*» [γ]. En 1953 Quine, [334], proposera une version avec une pendaison surprise qui occasionnera le nom «*hangman paradox*» [δ] ou, plus souvent, «*the hangman*».

Nous ne relèverons pas le détail du début de la discussion dans la revue britanique *Mind* ; Quine résume assez fidèlement sa teneur en indiquant une rafale (*flurry*) d'articles de divers degrés d'absurdité [7]. Il note par ailleurs (ibid.) que sa solution (1953), [334], est claire pour lui, mais pas forcément pour les autres. De fait, si elle a eu une grande influence et fut acceptée par beaucoup comme *la* solution de ce paradoxe (pour certains jusqu'à trente ans plus tard d'après Sorensen), elle est vite critiquée par R. Shaw (1958), [381], comme une «évasion». Dans nos termes, il s'agit d'une (simple) reformulation ; de fait, Quine se repose largement sur un certain sens du verbe «*to know*» qui n'est pas propre à faire l'unanimité. L'année suivante (1959) Ardon Lyon, [265], montrera que le choix de règles de Shaw est également une «évasion» (une reformulation du problème). En 1961, G. C. Nerlich, [293], critiquera à son tour la position de Lyon comme une reformulation. Bien que le traitement soit en général pour le moins insuffisant, ces articles présentent un certain nombre d'idées intéressantes : c'est dans l'un de ces articles que Shaw proposera l'idée que le paradoxe vient d'une autoréférence, idée qui sera reprise beaucoup plus rigoureusement par un article (lui majeur) de David Kaplan & Richard Montague (1960), [225]. A partir de ce moment le débat est connecté, encore que de façon lâche, au débat sur les dilemmes. Il occupe dans la discussion des dilemmes une place excentrique similaire à celle du paradoxe de l'omnipotence ou du procès de Protagoras et Evathlos, mais en apportant une littérature considérablement plus fournie. Toutefois, la discussion est loin de se résumer aux abords des dilemmes : le paradoxe est considérablement discuté d'une part comme paradoxe pragmatique, d'autre part comme un problème relevant des théories de la connaissances et des croyances. Il a également été rapproché, mais de façon mineure, aux sorites du fait de la récurrence qu'il met en œuvre.

Notons enfin que la discussion de ce paradoxe n'est pas restreinte au domaine de la logique et est reliée à des problèmes extérieurs. C'est ainsi que E. V. Milner le rapprochera de la parabole «du Mauvais Riche et de Lazare» [8].

3 Un paradoxe pragmatique ?

Gardner, [158], souligne que «l'erreur dans le raisonnement [des élèves (dans notre formulation)] n'a toujours pas été découverte par les logiciens» [9]. Il semble donc qu'il s'agisse d'abord pour lui d'une paralogie. Plusieurs des points historiques que nous avons soulignés penchent en effet largement en faveur du fait que ce paradoxe est ou une paralogie ou une paradoxie et excluent assez résolument la paracosmie. Nous pourrions encore ajouter des traitements en logique multivalente qui semblent très fréquents dans ces deux cas (nous n'avons pas repris ce point en conclusion). Cependant la présence d'une autoréférence, mais surtout de reformulations en rafale et/parce que

5. Voir Quine, [340], prob. ca. p. 234, d'après Sorensen, op. cit., pp. 262 sq. Quine indique également que ce paradoxe circule dès 1943 dans [334], p. 65.

6. Toutefois Ekbom indique avoir eu alors l'impression que ce paradoxe faisait partie du folklore. Selon Gardner, par contre, ce paradoxe serait apparu dans les années 1940, cf. [158], p. 27.

7. Cf. Quine, 1985, [340], p. 234, cité in Sorensen, [389], p. 263.

8. Cf. Poundstone, op. cit., [327], p. 153.

9. Gardner (1980?), op. cit., [158], p. 27.

fragiles, indiquent très largement que ce paradoxe est une paradoxie (un dilemme). Nous nous proposons maintenant d'observer ce point de façon plus directe.

Remarquons d'abord que toutes les possibilités envisageables d'origine de l'erreur semblent avoir été envisagée. Pour Michael Scriven (1951), [374], il s'agit d'un «*paradoxical announcement*»[ε], c'est donc dans l'annonce que réside le paradoxe. Pour Paul Weiss (1952), [442], puis de nombreux autres, ce paradoxe est le «*prediction paradox*»[στ], c'est donc la prédiction qui contient le problème. Mais pour d'autres, comme O'Connor (1948), [299] c'est un paradoxe pragmatique. Nombre d'auteurs y verront un paradoxe de la connaissance et le résoudront en analysant la modalité «*to know*»[ζ], etc. Certains, nous l'avons dit, iront jusqu'à le rapprocher des sorites. Mais l'évaluation de la force elle-même est très variable. Pour de nombreux auteurs ils s'agit simplement d'un paradoxe, Quine (1953), [334], parle de «*so-called paradox*» (soi-disant paradoxe), mais pour Kaplan & Montague, [225], le paradoxe est *redivivi* («*regained*»[η]). Ayer (1973), [21], ira jusqu'à parler d'«*antinomy*» (mais «*supposed*»[θ]) tant le paradoxe résiste.

Nous nous proposons d'étudier ce paradoxe en élaguant peu à peu les difficultés.

Certains considèrent qu'il reste toujours la possibilité que le l'action prédite ne soit pas effectuée et résolvent le paradoxe par là. Pour contrer ce point Weiss, [442], soulignait que l'annonce valait serment et était imbrisable (*unbreakable*), et Scriven, proposa la variation suivante.

Paradoxe 4 : **le paradoxe de l'inattendu (version de Scriven)**
Source : Michael Scriven, 1951, [374], p. 404, trad. libre

Considérons un enquêteur qui vous désigne deux boîtes, (1) et (2) et déclare «Dans l'une de ces deux boîte il y a un œuf inattendu. Vous pouvez uniquement les ouvrir dans l'ordre de leur numéro. Quelle boîte contient l'œuf?»

Comme Scriven le souligne on peut préciser le sens à donner *ici* au mot «inattendu», ce qui repousse bon nombre de solutions par reformulation. Nous entendrons le problème dans ce sens : «Il y a un seul œuf, et il n'est pas possible de savoir où il est avant d'avoir ouvert la boîte qui le contient.»

Ecartons immédiatement la parenté avec les sorites qui proviendrait de la récurrence : on le voit sur cet exemple, chaque étape de la récurrence peut être faite directement. Par ailleurs, comme le professeur de notre exemple le soulignait, si l'on a un argument pour montrer que telle suite n'a pas de dernier élément, alors celle-ci ne peut exister. Nous y reviendrons.

Pour certains ce paradoxe est un paradoxe de la *pré*-diction, il a donc essentiellement affaire au temps. L'exemple suivant, que nous proposons, montre que le problème peut être présenté de façon non temporelle et qu'il ne nécessite pas de grandes facultés de réflexion de la part des cobayes.

Paradoxe 5 : **le paradoxe de l'inattendu (version non temporelle)**
Source : Yannis Delmas-Rigoutsos, 1990, [107], pp. 43 sq., nous adaptons

Un roi qui avait entendu parler du paradoxe de l'inattendu veut vérifier que certaines conclusions qui lui viennent à l'esprit sont plausibles. Pour ce faire, il dispose de moyens de taille. On dispose de 21 cellules placées en ligne, chacune munie de d'une glace sans tain qui permet de voir à gauche toutes les cellules se trouvant à gauche et à droite sa propre image. On dispose dans chaque cellule un prisonnier, qu'il soit apte à la réflexion ou non. Le roi leur annonce alors : «Un garde va introduire un tigre dans l'une de vos cellules mais aucun d'entre vous ne pourra affirmer avec une certitude absolue [i.e. démontrer] qu'un tigre est dans la cellule qui se situe exactement à sa droite.»

Il advint que le prisonnier de la 5e cellule eut la visite (probablement peu courtoise) d'un tigre. Les prisonniers, du 6e au dernier, savaient parce qu'ils le voyaient que l'unique tigre royal était dans la cellule n° 5 et donc ne pouvaient affirmer qu'il était à leur droite. Les condamnés 1 à 4 ont pu faire un raisonnement mais celui-ci ne leur indiquait qu'une chose : ils s'étaient fait "rouler" par le roi, en particulier ils ne pouvaient rien dire de précis sur le tigre sauf qu'il était à droite de chez eux et probablement repu. Enfin, le prisonnier de la cellule n° 5 ne pouvait rien dire du tout.

Cet exemple ne montre plus non plus de lien évident avec le paradoxe de Moore, paradoxe de la connaissance souvent rapproché du paradoxe de l'inattendu (et qui s'exprime ainsi : «*p, but I do not believe that p.*», où p est une proposition).

Par ailleurs, on voit que le raisonnement des cobayes n'est plus nécessaire au raisonnement problématique : c'est le seul fait que l'on *puisse* s'imaginer à la place des prisonnier (dans une certaine mesure) qui permet le paradoxe.

4 Réduction à un dilemme

Il va de soi que les quelques remarques précédentes ne visent ni à resoudre ce paradoxe ni à répondre aux très nombreuses analyses de ce paradoxe, loin s'en faut. D'une certaine manière, étant donné la variabilité manifeste d'interprétations, cela ne serait pas possible : on ne peut dialoguer de façon rationnelle et critique qu'avec des auteurs qui lisent sensiblement le même paradoxe dans le même énoncé. Ceux qui interprètent le verbe «connaître» dans un sens très différent de celui que nous décidons d'employer ici traitent donc d'un *autre* paradoxe. Nous nous bornerons donc à exhiber (ou à souligner) la structure d'autoréférence de l'histoire, montrant ainsi que le paradoxe se fonde généralement sur un dilemme, *même s'il peut soulever d'autres questions*, à tort ou à raison.

Pour nous ramener à la forme canonique des dilemmes, nous commencerons par nous passer de la récurrence. Ceci peut être fait de deux façons : ou bien nous commençons par effectuer le raisonnement des élèves jusqu'à nous ramener à un seul jour, ce qui correspond à un relais d'engagement. Ou bien nous raisonnons extérieurement au paradoxe en utilisant l'argument du professeur pour conclure que le paradoxe en sept coups n'est qu'une version à six relais de boucle du dilemme en un coup (exposé plus haut).

Scriven, [374], souligne déjà en 1951 l'équivalence avec le dilemme en un coup mais certains auteurs ont ensuite souligné la différence entre le premier jour et les autres. Pour d'autres, c'est le dernier jour qui est particulier. Plutôt que de répondre à leurs arguments nous nous restreindrons donc au cas à deux moments. Nous reprendons donc notre version en supposant qu'il y a deux cellules seulement. Nous laissons ouvertes les deux possibilités pour la visite du tigre.

Symbolisons alors, comme nous l'avions déjà fait dans [107], les divers éléments en question. Nous noterons 1 le fait que le tigre soit en (1) et 2 le fait qu'il soit en 2, nous noterons $K_s\varphi$ le fait qu'avec les connaissances disponibles dans la cellule s (et les hypothèses du problème) nous pouvons démontrer φ. Insistons que ces notations ne sont pas une formalisation du problème, mais vont nous servir à exprimer notre raisonnement de façon précise et ramassée. La première hypothèse est $\neg 1 \to 2$, l'incertitude est, par convention, interprétée comme $\neg K_1 1 \wedge \neg K_1 2 \wedge \neg K_2 2$, et l'hypothèse du miroir sans tain est $1 \to K_2 1 \wedge \neg 1 \to K_2 \neg 1$. Notons H ces hypothèses. On suppose toujours d'une manière ou d'une autre que les prisonniers peuvent faire tout raisonnement que nous pouvons faire, ce qui se traduit (notamment) par : si $\varphi \to \psi$ alors $K_s\varphi \to K_s\psi$ (transitivité démonstrative). Nombre d'auteurs utilisent cette hypothèse après un raisonnement complexe, nous l'utiliserons directement : $\neg 1 \to 2$ (première hypothèse) donc $K_2\neg 1 \to K_2 2$. Par la troisième hypothèse, on tire $\neg 1 \to K_2 2$ donc finalement 1 (seconde hypothèse). C'est la première étape de récurrence. Notons H' les hypothèses du raisonnement (non comprise la transitivité démonstrative) ne faisant pas mention de K_1. Ce que nous venons de voir est le fait que

$$\vdash (H' \wedge (K_2\neg 1 \to K_2 2)) \to 1.$$

Faisons maintenant intervenir le fait que le premier prisonnier connaisse les hypothèses du problème. Comme les auteurs ne s'accordent pas tous sur le sens à donner à $K_1\varphi$ quand φ contient des occurrences de K_1 nous restreindrons cette nouvelle hypothèse à K_1H' (plutôt que K_1H). Comme, par hypothèse, $\neg K_1 1$, on en arrive donc, en utilisant la transitivité démonstrative pour K_1 (sur des expressions ne contenant pas d'occurrence de K_1) à

$$H, (\text{transitivité démonstrative “resteinte” sur } K_1) \vdash \neg K_1(K_2\neg 1 \to K_2 2).$$

Autrement dit, nous avons une contradiction dès que nous ajoutons à H (donc à H') l'application la plus élémentaire de la transitivité démonstrative pour K_2 : $K_2\neg 1 \to K_2 2$.

Comme nous l'avons indiqué certains penseurs critiquent la composition des K_s, mais cela est fort difficile à défendre dans le cas présent où les seuls cas sont des K_2 enchassés dans des K_1. Ceci

est d'autant plus difficile que nous avons décidé d'entendre K_s comme la possibilité de conclure certaines choses à partir de certaines données empiriques. Si l'on voulait modéliser (formaliser) les K_s mathématiquement, il n'y aurait aucune difficulté : ces K_s correspondent au prédicat «est démontrable» lié à deux théories T_s. L'imbrication des deux points de vue ne pose aucun problème parce que *à aucun moment on n'a besoin de formaliser le raisonnement de (2)* : $K_2\varphi$ peut être considéré comme purement atomique et seulement muni des hypothèses H et, éventuellement, de $K_2\neg 1 \rightarrow K_2 2$. Nous n'avons rien utilisé d'autre. Pour éviter toute confusion, nous formaliserons donc seulement K_1 (par la déduction par une théorie T_1) et laisserons K_2 purement formel (les $K_2\varphi$ sont donc des atomes du langage de T_1). Selon une telle modélisation, et si nous notons $\Box_1$ la formalisation de K_1 (démontrabilité dans T_1), nous pouvons réduire 2 à $\neg 1$. Dans cette formalisation, H' s'exprime de la façon suivante :

$$H' \;=\; \neg\text{« }K_2 2\text{ »} \;\wedge\; (\text{« }1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2 1\text{ »}) \;\wedge\; (\neg\text{« }1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2\neg 1\text{ »}).$$

Donc :

$$\text{« }K_2\neg 1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2 2\text{ »} \vdash H' \rightarrow \text{« }1\text{ »}.$$

Comme H' ne fait pas intervenir K_1, il se représente dans T_1, et nous avons alors :

$$T_1 \vdash \Box_1(\text{« }K_2\neg 1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2 2\text{ »}) \rightarrow (\Box_1 H' \rightarrow \Box_1\text{« }1\text{ »}).$$

Si T_1 contient H, nous avons alors $T_1 \vdash H'$, donc $T_1 \vdash \Box_1 H'$, d'une part, et, d'autre part, $T_1 \vdash \neg\text{« }1\text{ »}$, d'où, finalement,

$$T_1 \vdash \neg\Box_1(\text{« }K_2\neg 1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2 2\text{ »})$$

soit

$$T_1 \nvdash \text{« }K_2\neg 1\text{ »} \rightarrow \text{« }K_2 2\text{ »}.$$

En conclusion, imposer dans la théorie du premier prisonnier la transitivité démonstrative élémentaire du second prisonnier revient à imposer la contradiction de cette théorie. Du point de vue des hypothèses, ceci ramène donc notre paradoxe à une version élaborée[10] de

$$\varphi = \neg\Box\varphi.$$

Nous retrouvons donc une forme typique de dilemme apparentée au théorème de Gödel.

Nous n'avons pas consulté toute la bibliographie sur ce paradoxe, ni n'avons fait de recherches sur l'état récent de la discussion, aussi ne savons-nous pas si une telle démonstration est originale. Pour autant, le seul résultat que nous avions en vue est atteind : nous sommes bien dans un schéma typique des dilemmes (même si le relais, d'engagement et/ou de boucle est très important).

10. En fait, pour être exact nous avons plutôt $\varphi = \psi \wedge \neg\Box\varphi$, mais les hypothèses sont choisies de telle façon que ψ soit rendu vrai par les faits.

II Des dilemmes médiévaux

Les exemples suivants sont tirés de Gauthier Burley et Thomas Bradwardine tels qu'ils apparaissent dans [348] [11], sans pour autant qu'il faille leur en attribuer la paternité. Ce sont tous des versions du Menteur.

Le premier exemple rappelle (anticipe) à s'y méprendre les recueils d'énigmes actuels présentant des personnages intrinsèquement "menteurs" (falsidicteurs) ou "sincères" (véridicteurs).

Paradoxe 6 : **Socrate se dit malade**
Source : cf. [348] p. 211 (BUR. 1.02)

Supposons que Socrate dise qu'il est malade, que par ailleurs tout homme malade dise le faux et rien d'autre, tandis que tout homme bien portant dise le vrai et lui seul.

On demande si Socrate dit le vrai ou le faux.

Le second suit cette veine.

Paradoxe 7 : **Socrate n'aura pas d'argent**
Source : cf. [348] p. 211 (BR. 8.01)

Socrate dit qu'il n'aura pas d'argent, et on suppose que quiconque de dit pas le faux aura de l'argent et lui seul.

Socrate aura-t-il de l'argent ou non?

Paradoxe 8 : **Socrate infère à partir du faux**
Source : cf. [348] p. 211 (BUR 1.06)

Socrate fait cette conséquence et celle-là seulement : Socrate infère à partir du faux, donc quelque chose est faux.

Socrate infère-t-il à partir du vrai ou du faux?

Paradoxe 9 : **Socrate sophistique**
Source : cf. [348] pp. 211 sq. (BUR. 1.09 et 4.09)

Socrate fait le syllogisme suivant. «Tout sophiste sophistique. Or Socrate est sophiste, donc Socrate sophistique.»

Socrate est-il ou non sophiste (sachant qu'est sophiste celui-là seulement qui infère d'une majeure vraie et d'une mineure fausse)?

D'autres exemples peuvent être trouvés chez Heytesbury, [396], ou Buridan, [62]. Nous les reprenons pas dans la mesure où ces textes sont aisément accessibles.

III Paradoxes proches de paradoxes cités dans le texte

Nous donnons dans le corps du texte un exemple plus récent du paradoxe suivant (cette version n'en est vraisemblablement pas pour autant la première).

Paradoxe 10 : **l'auto-proscription de B. Mates**
Source : Benson Mates, [278] p. 23, 1981

Never use a preposition to end a sentence with.'

Paradoxe 11 : **le Menteur par transformation de Tarski**
Source : Alfred Tarski, [415] n. 11, 1949 (?).

11. Dans la numérotation de Roure, [348], ces textes apparaissent aux paragraphes BUR.1.02, BUR.1.06, BR.8.01, BUR 1.09 et 4.09, BUR.1.13 et 4.13.

Soit la transformation qui associe à la proposition «toute phrase a la propriété F» la proposition « «toute phrase a la propriété F» a la propriété F».

Considérons maintenant la proposition « «toute phrase a une transformée fausse» a une transformée fausse». Est-elle vraie?

Le paradoxe suivant est une présentation de l'original du paradoxe de l'homme le plus inintéressant (donnée dans le cours du texte).

Paradoxe 12 : **le paradoxe de Bechembach**
Source : Edwin Bechembach[12]

Parmi les nombres entiers, il existe certainement des nombres très intéressants, 0, les petits nombres premiers, les millésimes remarquables, etc. Observons les autres, les nombres inintéressants, et en particulier le plus petit d'entre eux. Quel qu'il soit, cette propriété lui confère un intérêt remarquable : on aimerait vraiment pouvoir le rencontrer.

Le suivant est une version du paradoxe de Berry par Max Black :

Paradoxe 13 : **le paradoxe de Berry par M. Black**
Source : Max Black, cf. [46]

«Le livre que vous lisez contient de nombreux chiffres, considérez le plus petit nombre entier qui n'est cité d'aucune manière dans ce livre.»

Paradoxe 14 : **le paradoxe de l'hyperjeu**
Source : William Zwicker, années 1980, cf. [387], cap. 23, pp. 263 sqq.

Un jeu normal est un jeu qui se termine en un nombre fini d'étapes. On définit à partir de là les règles de l'hyperjeu en décrétant que le premier coup correspond à choisir un jeu normal, et les suivants à y jouer. Comme chaque hyperjeu ajoute un coup à un jeu normal, il ne comporte qu'un nombre fini de coups, par définition. Mais alors il peut être choisi au premier coup d'un hyperjeu, donc au second, etc.

IV Quelques jeux autour du Menteur

Voici quelques exemples repris chez Hofstadter, [202, 201], qui les présenta dans sa rubrique de janvier 1981 dans le *Scientific American*.

> «Cette phrase prétend être un paradoxe d'Epiménide, mais elle ment.» ([202] p. 7)
>
> A partir du Menteur de Quine : «Quel effet ça fait quand on vous demande : «Quel effet ça fait quand on vous demande, emboité dans des guillemets après la virgule?» emboité dans des guillemets après la virgule?» ([202] p. 9)
>
> «Je ne suis pas le sujet de cette phrase.» ([202] p. 11)
>
> Sur le thème des prophéties autoréalisatrices : «Cette prophétie va se vérifier.» ([202] p. 17)

Il ajoute en janvier 1982 plusieurs paradoxes communiqués par des lecteurs de la revue. Nous en citerons deux.

> Le premier est proposé par Robert Boeninger : «Cette phrase ne possède effectivement pas la propriété qu'elle prétend ne pas avoir.»
>
> Le second par Pete Maclean : «Si l'on permutait le sens des mots «vrai» et «faux», cette phrase ne serait pas fausse.»

12. Selon Martin Garder, [158], p. 22.

Appendice 2

Les logiques trivaluées ususelles

Les “logiques” trivaluées usuelles sont au nombre de trois. Ces trois systèmes prolongent les connecteurs usuels au-delà des valeurs de vérité $\top$ et $\bot$ à une troisième “valeur logique”, $\mathfrak{u}$. Selon les utilisations des logiques propositionnelles trivaluées, ce $\mathfrak{u}$ n'est pas nécessairement considérée comme une valeur de vérité, voire n'est simplement pas considérée comme une valeur. Dans ce cas, $\mathfrak{u}$ représente un état indéfini d'un prédicat, vu alors comme une fonction partielle. Kleene, qui a développé les deux systèmes usuels, défend expressément cette conception.

I Le système faible

Le système faible, encore appelé «système faible de Kleene» ou simplement «Kleene faible» [1], correspond au cas où $\mathfrak{u}$ est complètement absorbant: les connecteurs ont leur valeur bivaluée usuelle quand ils ont des opérandes bivaluées ($\top$ ou $\bot$), et $\mathfrak{u}$ sinon. Ce système s'adapte bien à une interprétation de $\mathfrak{u}$ au sens de “dénué de sens” ou “sans signification” (*meaningless*). Ce système est faible en ce sens qu'il affirme vraies ou fausses le minimun de propositions.

II Le système de Łukasiewicz

Le premier en date (début du siècle), ce système (fort) voit $\mathfrak{u}$ comme une valeur de vérité intermédiaire à $\top$ et $\bot$ et non comme un point d'indéfinition. On y a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, et $p \overset{\text{Ł}}{\leftrightarrow} q = (p \overset{\text{Ł}}{\to} q) \wedge (q \overset{\text{Ł}}{\to} p)$ mais *pas* $p \overset{\text{Ł}}{\to} q = \neg p \vee q$.

	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$

$p \wedge q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$p \vee q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\mathfrak{u}$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$

$p \overset{\text{Ł}}{\to} q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

$p \overset{\text{Ł}}{\leftrightarrow} q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\top$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\bot$	$\mathfrak{u}$	$\top$

III Le système fort de Kleene

Ce système, aussi appelé, simplement, «Kleene fort», voit $\mathfrak{u}$ comme une valeur inférieure à $\top$ et $\bot$, lesquels ne sont pas comparables. Ce système est adapté pour interpréter $\mathfrak{u}$ comme «indéfini» ou «vrai ou faux, mais on ne sait pas». Les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$ sont définis comme par Łukasiewicz,

1. On peut également trouver ce système associé à Frege.

mais pas l'implication ni l'équivalence. Ici $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, $p \stackrel{k}{\leftrightarrow} q = (p \stackrel{k}{\rightarrow} q) \wedge (q \stackrel{k}{\rightarrow} p)$ et $p \stackrel{k}{\rightarrow} q = \neg p \vee q$.

	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$

$p \wedge q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$p \vee q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\mathfrak{u}$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$

$p \stackrel{k}{\rightarrow} q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

$p \stackrel{k}{\leftrightarrow} q$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\mathfrak{u}$	$\bot$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\bot$	$\bot$	$\mathfrak{u}$	$\top$

Appendice 3

Solution du problème des neuf points

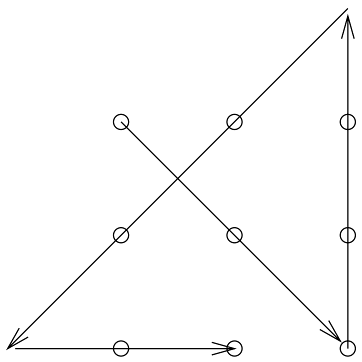

FIG. 3.1 - solution du problème des neuf points

Appendice 4

Les paradoxes de la Mécanique Quantique

I Les fentes de Young

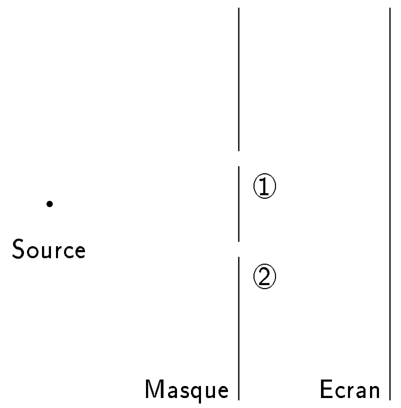

FIG. 4.1 - Le dispositif des fentes de Young

Le dispositif de l'expérience des fentes de Young est exposé sur la figure 4.1 : Une source "éclaire" une paroi dans laquelle sont percées deux fentes (ou deux trous). Derrière ce masque est disposé un écran susceptible de recevoir l'"éclairement" venant de la source. Dans la pratique cet écran est constitué d'un dispositif permettant d'évaluer la quantité d'"éclairement" reçue, plaque photographique ou compteurs de particules.

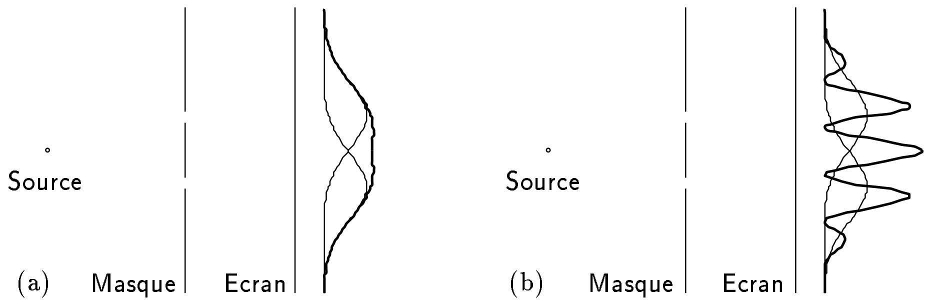

FIG. 4.2 - Corpuscules (a) et ondes (b) dans des fentes de Young

Allumons la source et obturons successivement l'une et l'autre fente. Les intensités d'"éclairage" obtenues apparaissent en traits maigres à droite de l'écran sur les figures 4.2 : il s'agit pour chaque fente d'une courbe en cloche centrée dans l'alignement de celle-ci et de la source. Si l'on laisse, par contre, les deux fentes ouvertes, nous observerons deux types de comportements selon que l'"éclairage" est constitué de particules ou d'une onde. Quand la source d'"éclairage" émet des particules (des balles de ping-pong par exemple), figure 4.2.a, celles-ci passent ou par la fente ① ou par la fente ② et donc l'intensité résultante (trait gras) est la somme des intensités partielles. Quand la source d'"éclairage" émet une onde (des rides à la surface de l'eau par exemple), figure 4.2.b, celle-ci se répartit entre les deux fentes qui se comportent alors comme deux sources dont les deux "flux" interfèreront. Ces figures d'interférence donnent une intensité résultante oscillant entre une absence d'"éclairage" et une intensité double de la somme des intensités partielles (trait gras).

Cette expérience permit à Thomas Young en 1803 de prouver que la lumière était bien une onde et de donner ainsi raison à l'hypothèse de Huygens (*Traité de la lumière*, 1690) contre celle, corpusculaire, de Newton (*Opticks*, 1704). Le monde physique revint sur cette conclusion quand, en 1905, Einstein expliqua l'effet photo-électrique par l'existence d'un quantum de lumière, qui deviendra ensuite une *particule* le de lumière, le photon.

En fait, si l'on prend des fentes larges, les figures d'interférence de la lumières peuvent se fondre et donner une intensité résultante somme de celles passant par ① et ②. Inversement, suite aux considérations de De Broglie, si les fentes sont bien ajustées en longueur, on s'aperçoit que l'on peut obtenir des figures d'interférence même avec des objets traditionnellement considérés comme des corpuscules tels que des électrons. C'est la fameuse dualité onde-corpuscule, symbolisée par cette expérience.

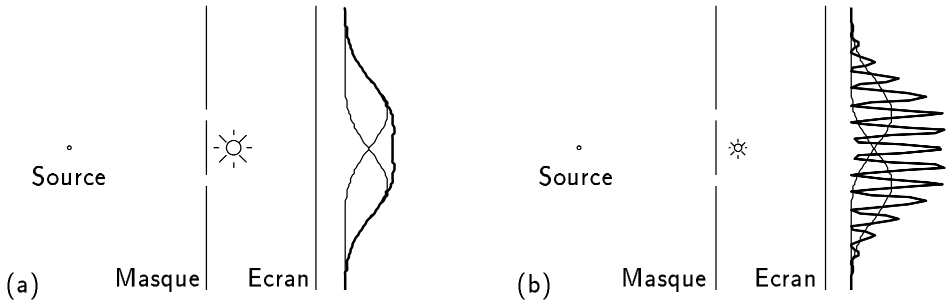

FIG. 4.3 - Observation des fentes de Young

Le paradoxe de la Mécanique Quantique intervient quand on essaye d'observer ces électrons. Pour ce faire on peut les éclairer par de la lumière (par exemple une source placée entre ① et ②). Plus la lumière sera "faible" (grande longueur d'onde) moins la position de chaque électron sera connue avec précision et le schéma restera alors interférentiel, figure 4.3.b. Inversement, plus la lumière sera puissante (grande fréquence, courte longueur d'onde) plus la position de chaque électron sera connue avec précision et plus le phénomène deviendra indiscernable du cas corpusculaire, figure 4.3.a. Notre connaissance (en fait notre observation) semble donc induire un comportement corpusculaire de la matière : «si l'on peut savoir si l'électron passe par ① ou par ②, il aura tendance à se comporter comme s'il passait effectivement par ① ou par ②, si l'on ne peut pas savoir, alors il se comporte comme une somme quantique de ces deux possibilités.» Ce paradoxe est emblématique de ce type de "comportement" de l'observation en Mécanique Quantique.

Pour plus de détails, nous renvoyons à notre conférence sur le sujet, [109].

II Le chat de Schrödinger

Schrödinger, [372], décrit ainsi en 1935 sa fameuse expérience de pensée : «Un chat est enfermé dans un compartiment en acier avec le mécanisme diabolique suivant (qui doit être protégé des interférences avec le chat): dans un compteur Geiger est disposée un petit bout d'une substance radioactive ; *si* petit que *peut-être*, au cours d'une heure, un atome pourra s'être désintégré ou, avec la même probabilité, qu'aucun ne se sera désintégré. Si l'atome se désintègre, le tube du compteur se décharge et un relais libère un marteau qui vient briser une ampoule d'acide cyanhydrique. Si on laisse le système à lui-même une heure, on peut dire que le chat vit *seulement si* durant ce temps aucun atome ne s'est désintégré. La première désintégration l'aurait empoisonné. La fonction ψ de l'ensemble du système exprimera ce fait (pardonnez l'expression) en mélangeant le chat vivant et le chat mort à parts égales.»

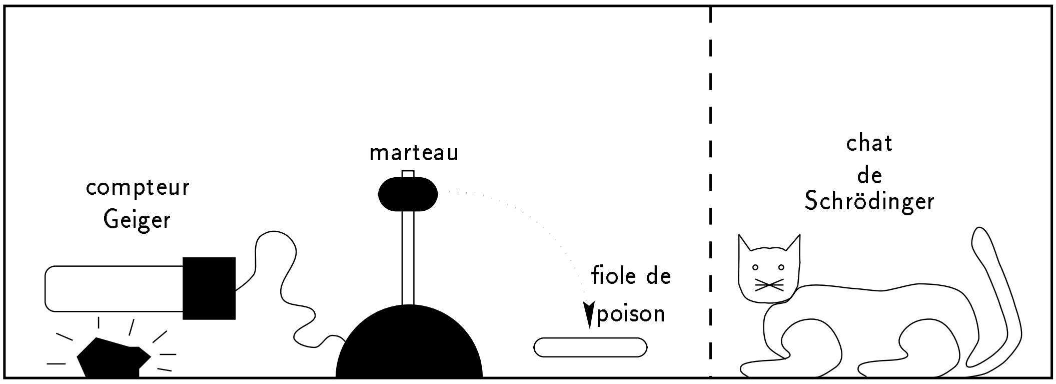

FIG. 4.4 - Le chat de Schrödinger

Le paradoxe est qu'un système proche de nous (le chat), soit susceptible d'être dans un état quantique mélangé dont il sortirait par la connaissance que nous en prendrions : il serait alors ou mort ou vivant. C'est du moins la présentation générale qui en est donnée. Ce paradoxe apparaît alors comme une métaphore de la mesure ou de l'observation de n'importe quel système mélangé. Il véhicule également l'idée que c'est notre connaissance qui *détermine* le cas. Certains commentateurs vont jusqu'à introduire l'idée de conscience dans l'enseignement qu'ils tirent de cette *Gedenkenexperiment*.

Pour des compléments, nous renvoyons à notre conférence sur le sujet, [109].

III Le paradoxe EPR

Einstein, Podolsky et Rosen, dans un fameux article, [131], publié également en 1935 et se fondant également sur une expérience de pensée (*Gedenkenexperiment*), démontrent que la Mécanique Quantique est ou bien incomplète ou bien non-locale (permet des corrélations instantanées à distance). Très attachés à une vision réaliste et locale, ils concluent que des variables cachées existent, sous-jacentes à la Mécanique Quantique. Dans les années 1960, J. S. Bell reprend leur idée et montre sur la base de calculs assez simples de probabilités quantiques que la Mécanique Quantique est *toujours* non-locale, qu'elle soit ou non complète. De plus, sa présentation permit à Alain Aspect de concevoir une vérification expérimentale du phénomène qui soit réellement conlusive (1976).

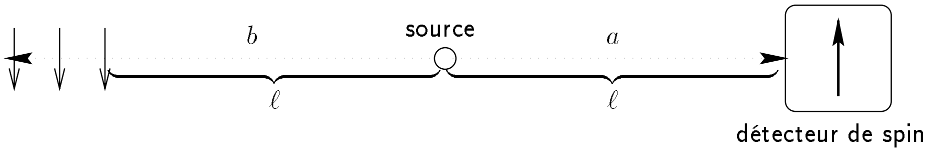

FIG. 4.5 - Le paradoxe EPR

Les détails de l'expérience de pensée importent peu. Une des façons de la conduire, et qui permet de la réaliser en pratique, est de considérer un processus physique (une désintégration par exemple) engendrant deux particules, a et b, dans deux directions opposées et de telle façon que les spin de a et de b soient anticorrélés : quand le spin de a est mesuré dans une direction, alors celui de b est opposé et réciproquement. Par contre ces spins ont des directions aléatoires inconnues *a priori*. Faisons fonctionner un détecteur de spin après que a ait parcouru une distance ℓ. Si le détecteur mesure un spin "haut", alors nous savons que, au même moment une mesure du spin de b donnerait un spin "bas". Pour autant, on peut démontrer que ce spin n'est pas prédéterminé. On dit que l'ensemble a-et-b forme un ensemble non local. C'est cette non-localité que l'on nomme en général le «paradoxe EPR» dans la mesure où elle semble violer, par son instantanéité, le principe relativiste que rien ne se transmet plus vite que la lumière.

On pourra trouver plus de détails chez E. Klein, [229], cap. II.5, pp. 185 sqq.

Appendice 5

Paradoxes non analysés

Nous citons ici quelques cas appelés généralement du nom de paradoxes et que le lecteur pourrait rencontrer ici ou là. Ces cas étant généralement connus (dans telle ou telle discipline), nous estimons que leur nom, au moins, doit apparaître dans notre thèse[1]. Même dans les cas où nous disposons de fort peu de renseignements, nous les fournissons au lecteur qui pourrait s'y intéresser. Certains peuvent rentrer dans le cadre de nos paradoxes scientifiques, d'autres sont, purement et simplement, hors de notre cadre.

Notons que nous n'avons pas tenté de recenser les innombrables paradoxes du vote, de la théorie de la décision ou des probabilités. Nous citons ici ceux que nous avons recontrés au cours de nos recherches concernant les principaux d'entre eux.

La répartition proposée ci-dessous ne prétend pas avoir de limites claires dans la mesure où les paradoxes cités ou mentionnés n'ont pas été étudiés en détail.

Dans chaque section, les paradoxes sont classés par ordre alphabétique (articles et particules non compris).

I Des phénomènes et théories surprenants

Le **paradoxe d'Allais** intervient en **théorie de la décision** (économie).

> «Le paradoxe d'Allais considère un acteur qui doit effectuer deux choix successif entre les couples de loteries A_1 et B_1 d'une part, A_2 et B_2 d'autre part (les gains étant associés aux probabilités correspondantes) :

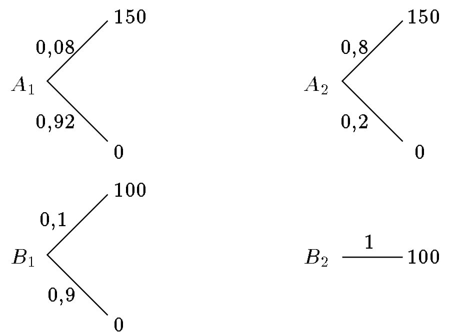

FIG. 5.1 - Les loteries du paradoxe d'Allais

> « Une majorité d'acteurs préfère A_1 à B_1 (il fournit un gain très supérieur pour une probabilité à peine inférieure) et B_2 à A_2 (il fournit un gain certain et tout à fait confortable),

1. Nous serions très reconnaissant à nos lecteurs de toute information supplémentaire, si possible avec source, qu'il voudra bien nous transmettre.

ce qui est en contradiction avec le critère de maximisation d'utilité du gain, qui impose de choisir simultanément A_1 et A_2, ou simultanément B_1 et B_2.»[2]

Le **paradoxe des ascenseurs**, intervient en **théorie des transports.** Il est différent du paradoxe de l'ascenseur que nous évoquons dans le texte (théorie des graphes, cf. n. 89 p. 255).

Quand on est en haut d'un immeuble à un ascenseur, celui-ci semble très souvent monter (alors que l'on veut descendre) tandis que si l'on est en bas l'ascenseur semble très souvent descendre (ce que l'on n'a pas forcément envie de faire quand on est déjà aux étages de garage). Ce phénomène s'explique par le fait que quand on est en haut de l'immeuble la partie encore plus haut, d'où viennent les ascenseurs qui descendent, est faible tandis que la partie plus basse de l'immeuble, d'où viennent les ascenseurs qui montent, est plus importante.

«Ce paradoxe fut inventé par le physicien Georges Gamow et son ami Marvin Stern. En expliquant ce paradoxe avec un seul ascenseur, comme nous le faisons ici, G. Gamow et M. Stern commettaient une petite erreur. Ils affirmaient que s'il y avait plus d'un ascenseur, les probabilités «bien sûr restaient les mêmes». | Donald Knuth [...] signala le premier que cette généralisation était fausse. Il démontra que, au fur et à mesure que le nombre d'ascenseurs s'accroît, la probabilité d'en attraper un, pour monter ou descendre, approche $\frac{1}{2}$ à chaque étage [sauf le premier et le dernier].»[3]

Le **paradoxe de Babinet**, parfois appelé «principe de Babinet», intervient en **optique physique.**

«A la limite de l'optique physique, une particule élimine d'un rayon incident deux fois sa section efficace. Ceci se produit parce qu'elle réfléchit ou absorbe une énergie de $\pi.r^2$ fois le flux incident, et en difracte la même quantité.»[4]

Le **paradoxe de Banach-Tarski** est un paradoxe des **mathématiques** lié à l'infini (qui n'est que superficiellement de géométrie, au sens usuel du terme).

Donné par Banach et Tarski en 1924, ce paradoxe énonce qu'il existe un découpage fini d'une boule pleine tel qu'un réarrangement de ces parties corresponde à deux boules pleines de mêmes dimensions. Bien évidemment ces parties ne sont pas mesurables (elles n'ont pas de volume). Elles sont construites à l'aide de l'axiome du choix et ne sont pas descriptibles (par des moyens finitaires). Ce paradoxe fut précédé en 1914 par un théorème dû à Hausdorff de teneur similaire, quoique d'expression moins saisissante. ([5])

On appelle parfois **paradoxe de Bernoulli**, un paradoxe sur **la série harmonique** en mathématiques. Il s'agit peut-être d'une confusion avec le suivant.

Bernoulli démontre que si la série harmonique, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, converge vers un nombre h on obtient une absurdité.

Le **paradoxe de Saint Petersbourg**, parfois appelé **paradoxe de Bernoulli**, concerne la théorie des **probabilités** et la **théorie de la décision.** C'est «un des cinq problèmes soumis par Nicolas Bernoulli à Rémond de Montmort» (et publiés par ce dernier en 1713)[6, 7] Il est résolu

2. Bernard Walliser, [438], p. 47.
3. D'après Martin Gardner, [158], pp. 104 sq., qui présente un paradoxe de ressort similaire pp. 105 sq.
4. Nous traduisons E. Weisstein, [443], art. BABINET'S PARADOX.
5. Pour plus de renseignements, on pourra consulter le divertissant petit ouvrage de M. Guinot, [181].
6. Ils apparaissent dans la seconde édition de son livre : *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, Pierre Rémond de Montmort, 1re éd. 1708, 2e éd. augmentée Paris 1713.
7. Cf. R. Charreton & J.-M. Bourdaire, [82], pp. 63 sq., qui est notre source principale. Cf. également B. Walliser, [438], pp. 42 sq., ou Falletta, [135], p. 210.

par son neveu Daniel Bernoulli dans les *Comptes-rendus* de l'Académie de Saint Petersbourg de 1730–1731 ([8]).

> Soit un jeu de pile ou face où un joueur adopte la statégie suivante (généralement considérée comme la seule martingale efficace) : «je joue 1F au premier tour, si je perds, je joue 2F au second, si je perds à nouveau, 4F, puis 8F, etc. et je m'arrète dès que je gagne.» Il raisonne ainsi: «Dans la mesure où le jeu s'arrètera forcément, je suis sûr de remporter d'autant plus d'argent que je me serais arrêté tard, et, en tout cas, de ne jamais perdre.»[9]
>
> Daniel Bernoulli montra que dans ce cas l'espérance de perte est infinie:
>
> $$\frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 + \frac{1}{8}.4 + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty.$$
>
> (Bien entendu l'espérance de gain aussi.) Il propose de considérer une utilité qui ne soit qu'en raison du logarithme du gain monétaire (l'argent se juge à l'aune de sa fortune) et de considérer l'espérance d'utilité et non de gain.

Le **paradoxe de Bertrand**, ou problème de Bertrand (1889), [34], est un des innombrables paradoxes des **probabilités.**

> Le problème de Bertrand est de savoir quelle est la probabilité pour qu'une corde d'un cercle soit plus longue que son rayon. Si l'on choisit "deux points au hasard" sur la circonférence (probabilité uniforme), on trouve $P = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3}$. Si l'on choisit un point au hasard sur la circonférence et qu'on trace au hasard une corde perpendiculaire à son rayon, on trouve $P = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
>
> Sainsbury[10] donne une autre version de ce problème: quelle est la probabilité pour que la longueur d'une corde d'un cercle soit plus grande que le côté d'un triangle équilatéral inscrit? Elle est plus longue si son milieu est à plus de la moitié du rayon bisecteur. Ce qui nous donne une probabilité de $\frac{1}{2}$. Mais elle est aussi plus longue si son milieu est compris dans le cercle concentrique au premier et de rayon moitié. Ce qui nous donne une probabilité de $\frac{1}{4}$ (le rapport de surface).

Le **paradoxe de Braess**, est un phénomène lié à la **circulation.**

> «Dans un réseau de transport non congestionné où chaque utilisateur choisit la route la plus rapide, la création d'une route supplémentaire entre quelques paires origine-destination ne peut pas résulter, de toute evidence, en une augmentation du temps de parcours pour les utilisateurs se déplacant à l'interieur d'une de ces paires. Il parait raisonnable de supposer que la même chose peut être dite des réseaux congestionnés. En 1968, D. Braess a presenté un exemple remarquable démontrant que ce n'est pas le cas : une nouvelle route peut augmenter le temps de parcours.»[11]

Le **paradoxe de la chaîne de magasins** est un paradoxe de la **théorie de la décision** en économie, introduit par Reinhard Selten en 1978, [375]. Jean-Pierre Dupuy le mentionne également comme «le paradoxe de la dissuasion».[12]

> Ce paradoxe concerne les guerres de prix pour défendre un monopole contre un postulant au partage du marché. Cette menace n'apparaît pas crédible parce que la guerre des prix

8. Ils seront édités en 1738 par l'Académie : «*Specimen | Theoriae Novae de Mensura Sortis | Auctore Daniele Bernoulli*» (Présentation d'une nouvelle théorie des probabilités par Daniel Bernoulli), *Commentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae* (Comptes-rendus de l'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg), vol. 5, années 1730 et 1731, pp. 175–192, éd. 1738. Cf. [82], p. 125.

9. Il nous semble que cette stratégie est appelée martingale de Saint Petersbourg (s.g.). On prétend qu'elle est la raison pour laquelle les mises sont plafonnées dans les casinos.

10. Cf. [365] p. 149.

11. Nous citons un résumé de [404]. Cet article s'intéresse à la prévalence de ce phénomène. On pourra le consulter, en sachant qu'un certain nombre d'articles plus récents sont disponibles sur ce sujet.

12. Cf. Dupuy, [125], n. 17 p. 131.

est très coûteuse pour le monopoleur. Pourtant l'observation réelle montre que cette menace est prise au sérieux. De façon plus générale la "rationnalité" (au sens des économistes) des comportements de prédation par les monopoleurs est faible : avec des hypothèses réduites, on montre que leur menace n'est pas dissuasive. Le nom vient d'un exemple classique où une firme monopolise la vente sur une région par l'intermédiaire d'une chaîne de magasins. ([13]).

Selten, [375], considère que ce paradoxe en est un au sens faible du terme : c'est seulement un phénomène contre-intuitif. A l'opposé, Koons, [234], considère ce paradoxe comme un paradoxe au sens fort, similaire au Menteur[14].

Le **paradoxe de Codman**, concerne le **système ostéoarticulaire**, en médecine.

«Le bras tendu est levé [au] dessus de la tête, le pouce tourné vers l'intérieur. Est-il en rotation interne ou externe ? Si le bras descend dans le plan frontal de l'abduction, le pouce sera tourné vers l'extérieur et donc en rotation externe, si par contre le bras descend dans le plan sagittal de l'élévation le pouce restera tourné vers l'intérieur et donc en rotation interne !»[15]

Le **paradoxe de la concurrence parfaite**, est un paradoxe de l'**économie.**

Si l'on suppose un marché avec concurrence parfaite on a nécessairement un seul prix pour un seul bien. Si un acteur économique pense qu'il est en situation de concurrence parfaite, alors il va dans le premier magasin venu. Mais alors il n'y aplus de concurrence. Ce paradoxe est similaire à celui de Grossman-Stiglitz.

Le **démon de Maxwell** engendre un paradoxe de la **thermodynamique.**

Imaginons deux compartiments clos et isolés joints par une paroi. Dans cette paroi est percé un trou qui, quand il est ouvert, laisse passer les mollécules de gaz d'un compartiment à l'autre. Imaginons maintenant un minuscule génie qui contrôlerait l'ouverture de ce trou et ne laisserait passer que les mollécules rapides de gauche à droite et les lentes de droite à gauche. On aurait finalement un récipient chaud à droite et un froid à gauche et diminution de l'entropie du système total.

Dans la pratique tous les systèmes physiques proposés échouent d'une façon ou d'une autre à réaliser ce tri autrement qu'en apportant de l'énergie ou en augmentant l'entropie extérieure dans une proportion compatible avec la théorie.

Le **paradoxe de Fechner**, est un **phénomène** concernant la **perception visuelle.** Il semble principalement décrit en **ophtalmologie.**

«Le paradoxe de Fechner peut être décrit comme suit : un sujet fixe binoculairement une plage éclairée ; l'un des yeux est muni d'un filtre neutre, l'autre œil est nu. Si on couvre l'œil muni du filtre avec un ecran opaque, la luminosité apparente de la plage eclairee semble augmenter : ceci paraît paradoxal dans la mesure où l'ecran a supprimé une partie du stimulus lumineux des deux yeux. Bien que le mécanisme exact du paradoxe de Fechner soit discuté, il constitue un phénomène primordial de luminosité binoculaire, utilisé en clinique strabologique[α].»[16]

Le **paradoxe du choix irrationnel**, aussi appelé paradoxe de Gaifman, intervient en **théorie de la décision.**

«Someone whom you trust implictely present you with a choice : you can take either or both of box A or box B. Whatever happens, there is $ 100 in box B : moreover, there will be in addition $ 10,000 in box A if and only if you choose irrationally. What should you do ?»[β, 17]

13. Cf. Selten, op. cit., [375], et Koons, [234], cap. 2.
14. Cf. Koons, loc. cit., [234], cap. 2.
15. Nous citons Hoffmeyer, Genoud et Cerutti, [198].
16. Nous citons approximativement un résumé de [246]. Nous renvoyons à cet article pour une description plus complète du phénomène.
17. Nous citons Sainsbury, [365], p. 149.

Le **paradoxe de Grossman & Stiglitz** (1980), [180], est un paradoxe de l'**économie**.

Ce paradoxe repose sur le fait que connaître la valeur d'un bien est coûteux aussi est-il plus avantageux de s'informer de cette valeur en interprétant les prix constatés sur le marché. A la limite, toute information disparaîtra des prix. ([18])

Ce problème est très similaire à celui de la concurrence parfaite.

Le **paradoxe de Fermi**, également appelé, plus rarement, **paradoxe de Fermi-Hart**, concerne la **vie extraterrestre**.

Le paradoxe vient du conflit entre le fait que la présence de la vie sur Terre semblerait impliquer sa presence ailleurs dans l'Univers et le fait que nous ne voyons aucune preuve, ni ne recevons aucun signal, qui puisse indiquer que les extraterrestres existent.

Le **paradoxe de Hausdorff** est un résultat surprenant de la **géométrie** des espaces euclidiens de dimension supérieure.

Le théorème/paradoxe de Hausdorff énonce qu'il n'existe pas de mesure (additive) finie et invariante du groupes des déplacements de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 3$.

Ce résultat est une conséquence d'un théorème plus précis de Hausdorff (1914), très proche du paradoxe de Banach-Tarski (voir ce paradoxe).

Le **paradoxe hydrostatique** est un paradoxe scientifique de la **mécanique des fluides**.

Ce paradoxe correspond au fait que la pression dans un liquide en un point ne dépend que de la profondeur de ce point sous la surface (pour un liquide homogène de masse volumique ρ, on a $P_A - P_B = \rho.g.(h_B - h_A)$). Ceci équivaut également au fait que le niveau d'un liquide s'élèvera à la même hauteur dans des tubes reliés entre eux (par des éléments pleins du liquide), indépendamment de la forme du tube : large ou fin, droit ou courbe, vertical ou oblique,...

L'**effet papillon** est un effet météorologique prédit par les modèles chaotiques du climat.

Dans la mesure où le système atmosphérique est fortement dépendant des conditions initiales (*i.e.* "chaotique"), un battement d'aile de papillon ici peut être la "cause" d'une tornade là.

Beaucoup de gens ont tendance à prendre ce paradoxe littéralement alors qu'il n'est, au mieux, qu'une image pour faire comprendre le phénomène de dépendance forte aux conditions initiales ("chaos"). Il n'est pas du tout évident, en effet, que notre notion de cause soit particulièrement adéquate à ce genre de situation.

Le **paradoxe de la récurrence descendante** (*backward induction paradox*) est un paradoxe de la **théorie de la décision** en économie.

Le paradoxe de la récurrence descendante intervient quand on itère une situation de dilemme du prisonnier en théorie des jeux. Pour chacun des coup la coopération mutuelle est la plus profitable aux deux joueurs globalement, mais si l'un fait défection alors que l'autre coopère, le "traitre" gagnera plus et le trahit moins. La situation la pire est celle où les deux joueurs font défection. Dans ce genre de situation, une politique (suivie par les deux joueurs) de maximisation des gains (appelée «rationnelle» en économie) induit les joueurs à faire défection. Si l'un et l'autre des deux joueurs sont "rationnels", et ce de connaissance commune (*common knowledge*), alors une récurrence partant du dernier coup pour remonter au premier montre que les deux joueurs doivent en permanence faire défection.

18. Grossman à étudié ce problème dans d'autres articles antérieurs, en 1976 et 1977. Sur ce point et la contagion mimétique, cf. André Orléan, [302], part. pp. 300–302.

Robert Stalnaker donne le commentaire suivant : « *[Backward Induction argument] is widely thought to be paradoxical, but there is little agreement about what the paradox consists in. Some say that the argument is fallacious, others that it shows an incoherence in the assumption of common knowledge of rationality, and still others that it reveals a self-referential paradox akin to [...] the liar.*» [Υ, 19]

Le **paradoxe de la roue d'Aristote** est un paradoxe scientifique de la **géométrie** antique.

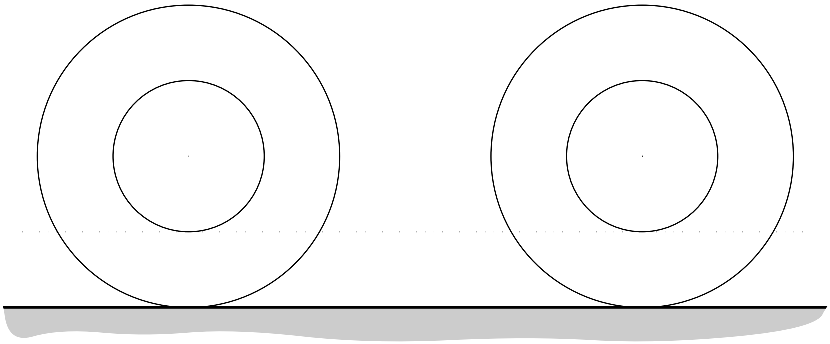

FIG. 5.2 - Le paradoxe de la roue d'Aristote

Considérons une petite roue concentrique à une grande (figure 5.2). Les rayons établissent une correspondance entre les points de la petite et de la grande circonférence. Si on fait rouler la roue le long d'une ligne, selon sa petite ou sa grande circonférence, cela semble impliquer que la longueur des deux circonférences est égale.

Ce paradoxe est mentionné dans l'ouvrage Μηχανικα /*Mēkhanika*/ (*Mécaniques*) attribué de façon douteuse à Aristote. ([20])

Les mathématiciens modernes résolvent généralement ce paradoxe en disant qu'une bijection ne préserve pas les longueurs. Il nous semble plus judicieux de répondre qu'une *homotéthie* (ou mieux, une similitude) ne préserve pas les longueurs. Le concept de bijection est, pour le moins, anachronique.

Le **paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz** est un paradoxe des **mathématiques** apparenté au paradoxe de Banach-Tarski.

Dans le plan, $\mathbb{C}$, des nombres complexes, si u est un nombre transcendant de module 1, l'ensemble $D = \mathbb{N}[u] = \{a_0 + a_1.u + ... + a_n.u^n \ : \ \forall i, a_i \in \mathbb{N}\}$ est dédoublable, c'est-à-dire qu'il existe deux parties A et B de D telles que $A \cup B = D$, $A \cap B = \varnothing$ et A et B soient superposables à D. ([21])

Le **paradoxe de Stokes** intervient en **mécanique des fluides.**

Le paradoxe de Stokes énonce qu'il est impossible de résoudre les équations de Stokes dans un domaine extérieur bidimensionnel pour une solution indépendante du temps s'annulant sur la limite et tendant vers une limite non nulle a l'infini.

Le **paradoxe du votant** (*voting paradox*) et un paradoxe du **vote.**

«[Ce paradoxe] souligne que les citoyens sont voter, bien que l'impact moyen sur le résultat du vote de leurs choix spécifique est faible au regard du coût — même modeste — de déplacement pour aller voter.» [22]

19. Cf. Stalnaker, [403], p. 157. Il ajoutait dans une communication au groupe de travail CondRat, CREA, Ecole Polytechnique (1994–96), que le paradoxe, pour certains résidait dans la conslusion surprenante de l'argument. Il notait, pour sa part, que ce qui est paradoxal est que même en prenant le temps de la réflexion un théoricien des jeux peut hésiter à adopter la solution que la théorie semble requerrir.

20. S.g. Nous tirons nos références de E. Weisstein, [443], qui n'a pas nos conclusions.

21. Sur les paradoxes et problèmes proches du paradoxe de Banach-Tarski, voir M. Guinot, [181].

22. Cf. Walliser, [438], p. 42.

Ce paradoxe est parent du paradoxe de la loterie.

L'effet Zénon quantique et le **paradoxe de Zênon quantique** sont souvent confondus. Ils interviennent tous deux en **Mécanique Quantique.**

L'effet Zénon quantique (*quantum Zeno effect*), ainsi nommé d'après les paradoxes de Zénon, correspond au fait (observé) que des transitions peuvent être inhibées par des mesures fréquentes. Cet effet est parfois considéré comme paradoxal (contre-intuitif) en ce que cela donne des dynamiques réversibles inhibées par de "simples" mesures [23].

Le paradoxe de Zénon, correspond au fait que l'observation "continue" d'une particule instable ne modifie pas sa durée de vie, alors que par un effet Zénon quantique on attendrait un allongement de celle-ci. La différence vient de ce que l'effet renvoie à des transitions induites alors que le paradoxe correspond à des désintégrations spontanées. [24]

II Des problèmes au sein de constructions théoriques

Le **paradoxe de Babuska**, aussi appelé **paradoxe de Sapondzhyan-Babuska** ou **paradoxe polygone-cercle**, intervient dans des **calculs par éléments finis** (en mathématiques).

La solution par éléments finis pour une suite d'approximations polygonales successives de plus en plus raffinées tendant vers une plaque circulaire mince soumise à une charge verticale, sur appuis simples, avec des limites continues, converge vers la solution d'un problème différent. Ainsi, la méthode aux déplacements finis ne permet pas d'approcher la solution correcte du problème. On peut contourner cette difficulté en imposant des conditions aux limites principales judiceuses.

Le **paradoxe des diamants et de l'eau** d'Adam Smith est un problème classique de l'**économie.**

Le **paradoxe de Dicke**, intervient en **cosmologie.**

Le paradoxe de Dicke est le fait qu'il semble que la valeur de la densité de notre univers semble extêmement proche de la densité critique, $\Omega = 1$, correspondant à un univers plat. La théorie inflationaire en donne une explication. [25]

Le **paradoxe de la réciprocité d'Eisner** intervient en **sismologie.**

Le principe de réciprocité sismique veut que quand une source verticale (vibrateur) et un récepteur (géophone) sont échangés, on obtient le même sismogramme. Ce phénomène est robuste et a pu être observé dans d'autres situations.

Le paradoxe d'Eisner est un exemple où la réciprocité viole le principe de conservation de l'énergie : il s'agit d'un ellipsoïde tronqué à un bout où l'on utilise les foyers. Dans un cas l'énergie recue est double que dans l'autre. Dahlen et Odom montrèrent qu'avec des petites sphère au lieu de points, les amplitudes sont les mêmes dans les deux cas, même si l'énergie diffère,... ce qui rend plus complexe la résolution du problème ponctuel.

Ce paradoxe a été exposé en 1980 et publié en 1983 [26].

23. Cet effet, aussi appelé «effet de la bouilloire observée», fut découvert en 1977 par Baidyanath Misra et George Sundarshan.

24. Pour plus de détails, notamment sur ces différences, voir Block & Berman, [47].

25. Cf. E. Weisstein, [443], art. DICKE PARADOX.

26. Nous résumons [91].

Le **paradoxe de Gray** concerne la **locomotion animale hydroportée.**

> Ce paradoxe apparaît sous la plume de James Gray en 1936. A la suite de nombreux scientifiques qui se sont intéressé à la nage des poissons et des mammifères marins ce zoologiste décide de calculer la résistance à l'avancement d'un solide delphinomorphe avançant à 20 nœuds. Le paradoxe tient dans le fait que la puissance musculaire que peut développer le cétacé serait sept fois inférieure à la valeur trouvée. (Par ailleurs cette vitesse est effectivement observée en mer.) [27]

Le **paradoxe de Kauzmann** intervient en **thermodynamique.** Il concerne des transitions vitreuses telles que l'entropie extrapolée du liquide devient inférieure à l'entropie de cristal (s.g.).

Le **paradoxe du soleil initial faible** intervient à la rencontre de la **cosmologie** et de la **planétologie.**

> Les modèles du soleil prévoient que la luminosité du soleil était environ 30% plus faible il y a 4 milliards d'années. Cependant les lits de rivières martiennes ainsi que les proportions isotopiques terrestre de $^{2}D/^{1}H$ et $^{18}O/^{16}O$ indiquent que ces deux planètes avaient des températures plus élevées qu'à l'heure actuelle. Dans les deux cas on suppose une atmosphère très riche en CO_2 à fort effet de serre.

Le **paradoxe de Sternberg-Koiter** intervient en **mécanique des solides** quand il s'agit de résoudre des équations décrivant un secteur angulaire auquel on applique un moment ponctuel (s.g.).

III "Paradoxes" éloignés de notre définition

Le **paradoxe calcique**, dit aussi **paradoxe du calcium** est un **phénomène médical** essentiellement décrit en **cardiologie.** Le **paradoxe de l'oxygène** est similaire.

> Le paradoxe calcique est une alteration profonde d'un tissu consécutive à une perfusion d'un organe isolé avec une solution depourvue d'ion Ca^{2+} suivie d'une perfusion avec une solution contenant cet ion. Ce phénomène est abondamment étudié sur le cœur isolé. Le paradoxe à l'oxygène est similaire.

Le **paradoxe du dogmatisme**, tel qu'il est présenté par G. Harman, [189], formule le "cercle vicieux" qui sous-tendrait le raisonnement dogmatique.

> «*If I know that h is true, I know that any evidence against h is evidence against something that is true; so I know that such evidence is misleading. But I Should disregard evidence that I know is misleading. So, once I know that h is true, I am in a position to disregard any future evidence that seems to tell against h.*» [δ, 28]

Le **paradoxe de l'intelligence artificielle** est le conflit d'intuitions correspondant à la volonté de cette discipline de vouloir mécaniser ce que l'on ressent généralement comme le plus humain : la pensée [29].

Le **paradoxe de Mandeville** en **économie politique** est le fait que des vices privés (p.e. la débauche) puisse conduire à des vertus publiques (des emplois).

27. On pourra consulter [426] pour une présentation de phénomène contribuant à expliquer cette divergence.
28. Cf. op. cit., p. 148. Cité par Sorensen, [389], p. 315.
29. Un des buts avoués de Hofstadter, dans *Gödel, Escher, Bach*, [202], est de montrer que cela n'a rien d'une contradiction (cf. p. 30).

IV "Paradoxes" non étudiés

Le **paradoxe de d'Alembert** intervient dans en **mécanique des fluides**.

Le **paradoxe de la boîte de Bertrand** est un paradoxe des probabilités.

Le **paradoxe de Borda** est un paradoxe du **vote**.

Le **paradoxe de Bowman**, ou **paradoxe profit-risque** (en anglais *risk-return paradox*), est lié à la planification stratégique, en **théorie de la décision**.

Le **paradoxe coercitif de Brown** concerne la **coercition dans des cristaux ferromagnetiques parfaits**.

Le **paradoxe d'Ehrenfest** est lié à la mesure des longueurs en **physique relativiste**.

Le **paradoxe d'Ellsberg** apparaît lié à des problèmes de prise de décision (s.g.).

Le **paradoxe de Giffen**, est un paradoxe de l'**économie**.

Le **paradoxe de Girard**, en logique, concerne les **systèmes formels**.

Le **paradoxe de Godambe**, en **statistique**, est lié à l'échantillonage aléatoire.

Le **paradoxe de Goh**, est lié à la **pratique des méthodes de Taguchi en analyse marginale** (gestion).

Le **paradoxe de Herlofson**, concerne l'absorption d'énergie dans des plasmas froids inhomogènes (s.g.).

Le **paradoxe de Hoyle**, en **cosmologie**, concerne l'ère pré-galactique.

Le **paradoxe de Klein** intervient en **Mécanique Quantique**.

Le **paradoxe de Kuiper**, en **cosmologie**, concerne l'existance de *contact binaries* (en anglais : systèmes binaires avec contact, s.g.) de composantes inégales.

Le **paradoxe de Leontief** intervient en modélisation **économique** des échanges commerciaux entre pays.

Le **paradoxe de Lindley** est lié aux **modèles bayésiens** en théorie des probabilités.

Le **paradoxe de Lord**, ou **paradoxe MAD de Lord** (littéralement «le paradoxe "FOU" de Lord»), de 1983, intervient en **statistique descriptive**.

Le **paradoxe de von Neumann** intervient en **mécanique des fluides**.

Le **paradoxe d'Ostrogorski** est un paradoxe du **vote**.

Le **paradoxe de Pasinetti** concerne la **distribution des richesses**, en économie.

Le **paradoxe de Seeliger**, en **astrophysique**, comme le paradoxe d'Olbers (ciel en feu), concerne le **fond de rayonnement cosmique**[30].

Le **paradoxe de Sen**, intervient en **théorie de la décision**.

Le **paradoxe de Stein**, concerne la procédure de **décision bayésienne** en théorie de la décision.

Le **paradoxe de Sutherland**, en **Mécanique Quantique**, est lié au paradoxe EPR.

Le **paradoxe de Szilard**, en physique statistique, est lié à l'**identification entre l'entropie thermodynamique et l'entropie informationelle**.

Le **paradoxe de Winter** est un paradoxe de l'**économie** (ayant trait aux problèmes de la décision).

Le **paradoxe de Yamaguchi** intervient dans l'étude des **désintégration par interaction faible des particules instables**.

30. Il s'agit peut-être d'une formulation de celui-ci.